Aplicação da Álgebra Linear na Engenharia Elétrica: Análise de Circuitos Elétricos em Corrente Contínua

Wanderson Vieira Dias Santos (Unit), Wandersonosenhordoxadrez@outlook.com;
Aislan Silva Primo (Orientador), Aislanprimo14@gmail.com.

Universidade Tiradentes/Engenharia/Aracaju, SE.

1.01.00.00-8 – Matemática 1.01.01.00-4 - Álgebra

RESUMO: Nesse trabalho acadêmico é apresentado uma aplicação da álgebra linear na engenharia elétrica, que tem como fundamento a análise de circuitos elétricos em corrente continua, baseado em um circuito elétrico, no qual contém dois resistores de 22Ω, dois de 10Ω e um de 47Ω juntamente com duas fontes de tensão de 9V e pequenos fios condutores, isso montado em uma protoboard. Empregou-se nesse circuito, nomeado no trabalho como circuito base, ferramentas da álgebra linear, com ênfase na solução de sistemas lineares, isso juntamente com ferramentas da física elétrica: A Lei de Ohm e As Leis de Kirchhoff. Os dispositivos do circuito base foram selecionados de forma que os valores encontrados como solução do sistema linear, retirado algebricamente do circuito base, tivessem valores possíveis de ser escrito na forma de fração, isso para uma demonstração fácil dos cálculos matemáticos. Os resultados experimentais encontrados matematicamente foram comparados com os resultados encontrados no multímetro, considerando as tolerâncias de cada dispositivo.

Palavras-chaves: Álgebra Linear, Circuitos Elétricos, Protoboard.

INTRODUÇÃO

A álgebra é a manipulação de operações matemáticas entre valores numéricos, juntamente com termos desconhecidos ou incógnitas, isso através de símbolos que expressam igualdade ou desigualdade entre esses valores e termos. No momento em que essas operações são bem definidas e descritas de forma linear pode-se dizer que está definida a álgebra linear.

Nesse ramo da matemática matrizes; determinantes e sistemas de equações lineares são algumas das ferramentas pertencentes a álgebra linear. Vale ressaltar, todavia, que essas três foram objetos de estudos, com o intuito de apresentar aplicações desse ramo da matemática na engenharia elétrica, tendo como foco principal a análise de circuitos elétricos em corrente contínua.

Em um circuito elementar as grandezas físicas: tensão; resistência e corrente elétrica, pertinentes à está área são encontradas de maneira simples. Entretanto em circuitos elétricos complexos, nos quais existem vários dispositivos elétricos é preciso a aplicação da álgebra linear.

A lei de Ohm relata que a (tensão elétrica), representado pela letra maiúscula V, é igual ao produto da (resistência elétrica), representado pela letra maiúscula R, pela (corrente elétrica), representado pela letra maiúscula I, como mostra a figura 1.

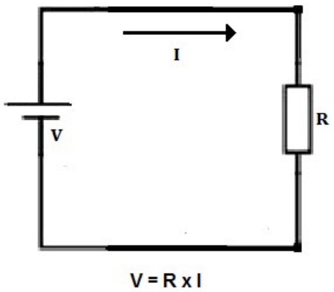

Figura 1 – Representação de um circuito elementar.

Como já foi dito, em circuitos elétricos mais complexos para ser possível obter determinadas grandezas é preciso utilizar conhecimentos algébricos. Um exemplo disso são as duas leis de Kirchhoff: lei de Kirchhoff das correntes e lei de Kirchhoff das tensões, as quais relatam, que: a primeira, a soma algébrica das correntes que entram em um nó é igual à soma algébrica das correntes que saem de um nó, como é mostrado na figura 2.

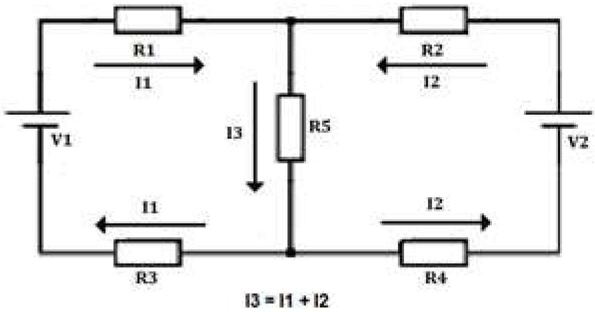

Figura 2 - Forma algébrica da primeira lei de Kirchhoff.

Já a segunda, a soma algébrica das tensões em uma malha é igual a zero, como mostra a figura 3.

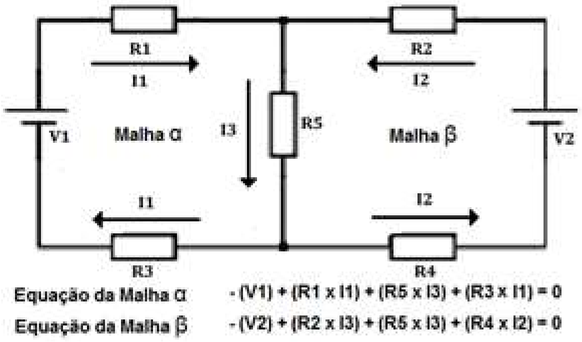

Figura 3 - Forma algébrica da segunda lei de Kirchhoff.

É notório que quando se aplica as leis de Kirchhoff em circuitos surge um sistema de equações lineares, o qual pode ser resolvido por meio de artifícios algébricos, ou seja, através da álgebra linear. Equações lineares são várias equações da forma como é mostrado na figura 4.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

Figura 4 - Forma algébrica de uma equação linear.

Na qual x1, x2, x3, ..., xn são as variáveis; a1, a2, a3, ..., an são os respectivos coeficientes das variáveis e b é o termo independente. Para que exista um sistema de equações lineares são necessárias várias equações lineares, na qual a solução de uma equação linear, seja a solução, não somente de uma equação, mas sim de todas as equações do sistema.

A partir disso pode-se dizer que quando a solução de uma equação (r) pode ser também validada como solução de outras equações, como por exemplo, as equações (s) e (t), é verídico afirmar que as equações (r), (s) e (t) são um conjunto de equações que formam um sistema de equações lineares. Segue logo abaixo, na figura 5, a representação de um sistema linear.

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

Figura 5 - Sistema linear formado por várias equações lineares.

É importante ressaltar que existem vários métodos para se determinar a solução de um sistema de equações lineares. Neste trabalho, todavia, irá ser tópico de solução de sistemas lineares apenas o método de Cramer. Esse método é estruturado com base na existência de um sistema de equações lineares **S**, como é mostrado na figura 5, ou seja, um sistema de **m** equações com **n** incógnitas sobre **IR**.

A partir disso é necessário transformar esse sistema **S** em três matrizes: uma matriz **A** do tipo **m por n**; uma matriz **X** do tipo **n por 1** e uma matriz **B** do tipo **m por 1**, respectivamente. Então dessa forma o sistema de equações lineares **S** poderá ser escrito sob a forma matricial **A.X = B**, onde: **A** recebe o nome de matriz dos coeficientes de **S**; **X** recebe o nome de matriz das incógnitas de **S** e **B** recebe o nome de matriz dos resultados de cada equação de **S**, como é mostrado na figura 6.

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\
a_{21} & . & . & . & a_{2n} \\
a_{31} & . & . & . & a_{3n} \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
a_{m1} & . & . & . & a_{mn}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n
\end{pmatrix}$$

Figura 6 - Representação de um sistema de equações lineares **S** na forma matricial **A.X = B.**

Com a obtenção da transformação do sistema lineares para a sua forma matricial, para ser possível encontrar a solução do sistema linear é necessário obter o valor do determinante geral, ou seja, o determinante da matriz **A**. Juntamente a isso é necessário, também, obter o valor do determinante de cada incógnita, o qual é obtido através da substituição de determinada coluna da matriz **A** pela matriz **B**.

Esse determinante é encontrado através da matriz que surge quando se substitui a coluna da incógnita escolhida, a qual está presente na matriz **A**, pela matriz **B**. Essa nova matriz é nomeada pelo tipo da incógnita escolhida, como por exemplo, matriz da incógnita **x1**; matriz da incógnita **x2**; matriz da incógnita **x3** ou matriz da incógnita **xn**. É exatamente o determinante dessa nova matriz, a qual depende da incógnita escolhida, o determinante de cada incógnita, o qual depende, também, da incógnita escolhida. Com o valor do determinante geral e o determinante de cada incógnita, para se obter o valor da incógnita propriamente dita é preciso, apenas, obter a razão entre o determinante da incógnita escolhida e o determinante geral. Vale ressalta que esse método irá ser utilizado como ferramenta para solucionar o sistema de equações lineares retirado do circuito elétrico utilizado como base e dessa forma a utilização desse método ficará clara.

ISSN: 1807-2518

MATERIAIS E MÉTODOS

Foi utilizado, neste trabalho, como base para a demonstração da aplicação da álgebra linear na engenharia elétrica, um circuito elétrico formado por cinco resistores: dois de 22Ω; dois de 10Ω e um de 47Ω juntamente com duas fontes de tensão de 9V como mostra a figura 7.

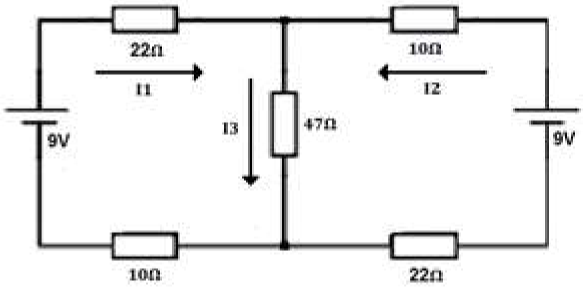

Figura 7 - Circuito base.

Com os conhecimentos de resoluções de sistemas lineares, tópico da álgebra linear, juntamente com a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff, foi possível encontrar as três correntes elétricas, as quais foram demonstradas através de vetores na figura 7. O desenvolvimento matemático das equações lineares retiradas das duas malhas do circuito base, através das leis de Kirchhoff, até determinar as correntes I1, I2 e I3, ou seja, a solução do sistema linear montado a partir do circuito base, é demonstrado na figura 8, no qual foi utilizado o método de Cramer para solucionar o sistema linear.

Pela primeira lei de Kirchhoff:

$$I_1 + I_2 = I_3$$
$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Pela segunda lei de Kirchhoff:
Malha 1

$$-9 + 22I_1 + 47I_3 + 10I_1 = 0$$
$$32I_1 + 47I_3 = 9$$
$$32I_1 + 0I_2 + 47I_3 = 9$$

Pela segunda lei de Kirchhoff:
Malha 2

$$-9 + 10I_2 + 47I_3 + 22I_2 = 0$$
$$32I_2 + 47I_3 = 9$$
$$0I_1 + 32I_2 + 47I_3 = 9$$

Dessa forma tem-se:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$32I_1 + 0I_2 + 47I_3 = 9$$
$$0I_1 + 32I_2 + 47I_3 = 9$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 32 & 0 & 47 \\ 0 & 32 & 47 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Determinante I_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 32 & 9 & 47 \\ 0 & 9 & 47 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 32 & 9 & 47 & 32 & 9 \\ 0 & 9 & 47 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_2 = (423 + 0 - 288) - (0 + 423 - 0)$$
$$\Delta I_2 = 423 - 288 - 423$$
$$\Delta I_2 = -288$$

Determinante I_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 32 & 0 & 9 \\ 0 & 32 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 32 & 0 & 9 & 32 & 0 \\ 0 & 32 & 9 & 0 & 32 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_3 = (0 + 0 + 0) - (288 + 288 + 0)$$
$$\Delta I_3 = -288 - 288$$
$$\Delta I_3 = -576$$

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta G} \qquad I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta G} \qquad I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta G}$$

$$I_1 = \frac{-288}{-4032} \qquad I_2 = \frac{-288}{-4032} \qquad I_3 = \frac{-576}{-4032}$$

$$I_1 = \frac{1}{14}\,A \qquad I_2 = \frac{1}{14}\,A \qquad I_3 = \frac{1}{7}\,A$$

$$I_1 \simeq 71{,}429mA \qquad I_2 \simeq 71{,}429mA \qquad I_3 \simeq 142{,}857mA$$

Figura 8 - Demonstração da determinação das correntes do circuito base.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O circuito base, o qual já foi mostrado na figura 7, foi montado em uma placa protoboard, como é demonstrado na figura 9, isso com o objetivo de utilizar um multímetro, aparelho que possibilita a medição da tensão elétrica; corrente elétrica e resistência elétrica, para comparar os valores obtidos nesse aparelho e os valores obtidos utilizando a álgebra linear juntamente com as leis Kirchhoff.

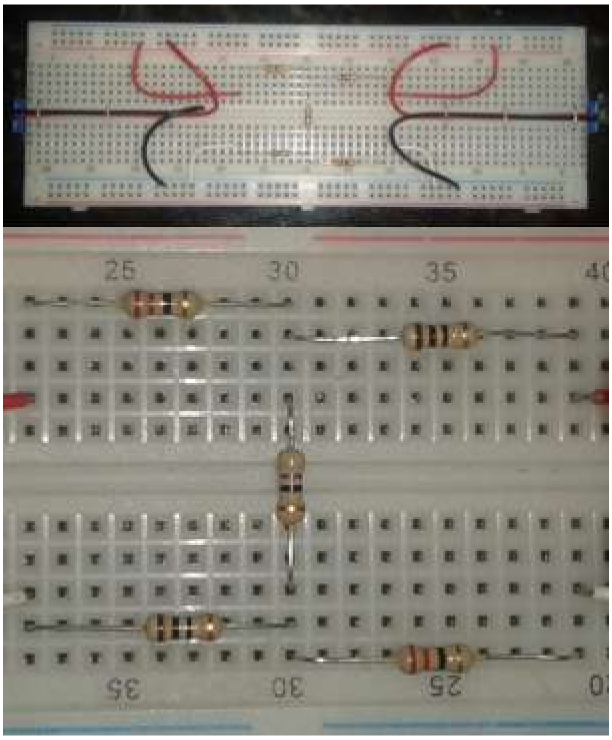

Figura 9 – Estrutura de montagem do circuito base na protoboard.

Após a comparação, foi possível relatar, que o valor da tensão no resistor de 47Ω obtido no multímetro foi diferente do valor obtido através dos cálculos, por fatores intrínsecos aos elementos do circuito. O valor da tensão obtido através do multímetro é demonstrado na figura 10 e os dois valores é mostrado logo abaixo na figura 11.

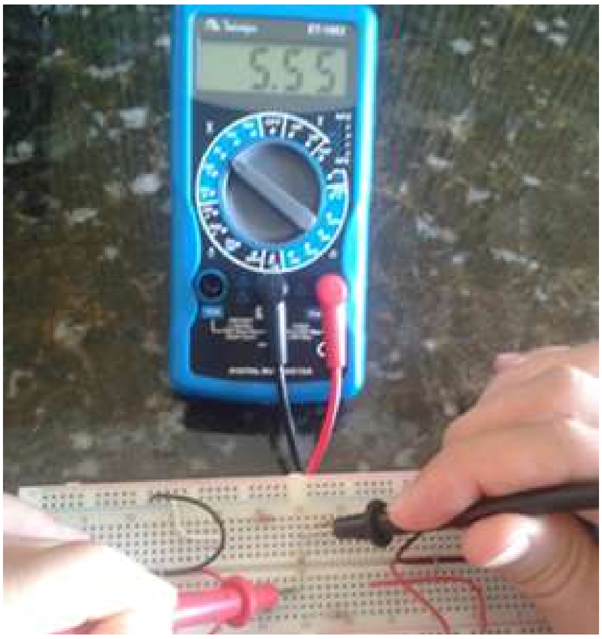

Figura 10 – Valor da tensão no do resistor de 47Ω.

Multímetro	Álgebra Linear e Leis de Kirchhoff
5,55 V	6,71 V

Figura 11 - Tensões obtidas no resistor de 47Ω.

O fato dos elementos terem faixas de tolerância e o valor da fonte não ser exatamente igual, como mostra a figura 12, os valores não se coincidem.

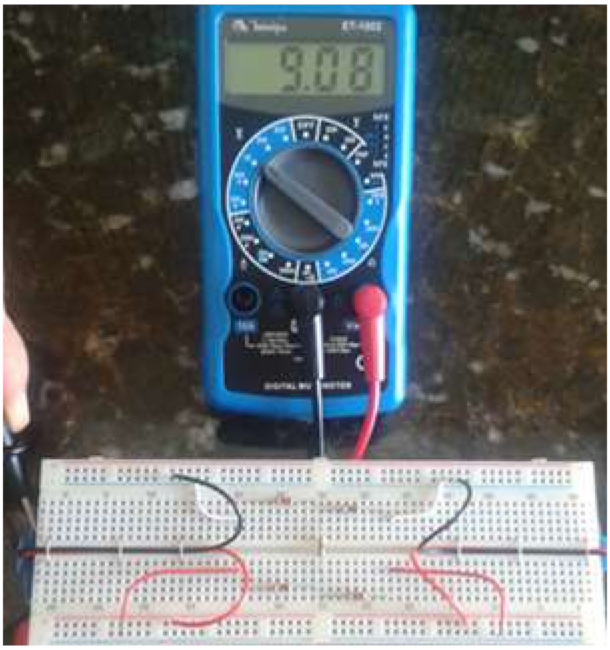

Figura 12 – Valor da tensão nos terminais da fonte de 9V.

CONCLUSÕES

Por tudo isso é possível relatar uma das aplicações da álgebra linear, especificamente, nesse trabalho, a utilização de ferramentas da álgebra linear, como por exemplo as que tratam de resoluções de sistemas lineares, para a análise de circuitos elétricos em corrente contínua. Conclui-se então que essa ferramenta matemática possibilita o estudo de circuito elétrico, de forma que o indivíduo possa saber o comportamento de determinados dispositivos elétricos no circuito.

É importante ressaltar que o trabalho apresentado contribui para conclusões incentivadoras, não só para alunos, mas para muitos indivíduos, os quais pensam que determinados ramos da matemática não tem aplicações na vida real, uma afirmativa que não é válida, pois como disse Nikolai Ivanovich Lobachevsky “Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”.

AGRADECIMENTOS

Vale ressaltar o grande incentivo, auxílio e apoio que o Professor Especialista Aislan Silva Primo promoveu, para que fosse possível o desenvolvimento dessa presente pesquisa. Por esse motivo deve-se a ele todos os agradecimentos.

REFERÊNCIAS

CRUVINEL, Frederico Borges. **Tópicos de Álgebra Linear e Aplicações em Problemas de Economia e de Engenharia.** Disponível em:<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tde/2961/5/TCC%20APLICA%C3%87%C3%95ES%20DE%20AL%20PROFMAT%202013.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2016.

NILSSON, James W; RIEDEL, Susan A. **Circuitos Elétricos.** 8. ed. São Paulo: Pearson, 2009.

PESCADOR, Andreza; POSSAMAI, Janaína Poffo; POSSAMAI, Cristiano Roberto. **Aplicação de Álgebra Linear na Engenharia.** Disponível em:<http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2011/sessoestec/art2127.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2016.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear.** 2.ed. São Paulo: Pearson, 0000

STERLING, Mary Jane. **Álgebra Linear PARA LEIGOS.** 1.ed. Rio de Janeiro: Alta Books, 2012.