



## ARTICULAÇÃO ENTRE GEOMETRIA E ÁLGEBRA COM USO DO ALGEPLAN: UM RELATO SOBRE APLICAÇÕES DE ATIVIDADES DO PIBID- MATEMÁTICA/DMA/UFS

Nailys Melo Sena Santos<sup>1</sup>

Eressiely Batista Oliveira Conceição<sup>2</sup>

Juliana de Souza Paula<sup>3</sup>

GT8 - Espaços Educativos, Currículo e Formação Docente (Saberes e Práticas).

### RESUMO

O presente trabalho relata a aplicação de uma sequência de atividade com uso do algeplan por bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID-Matemática/DMA/UFS), em uma turma do 8º ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública, no município Aracaju-SE. Essas atividades nos permitiram articular dois campos matemáticos, a geometria e a álgebra, e refletir sobre o nível de conhecimento geométrico desses alunos na proposta de van Hiele, que sugere uma sequência de cinco níveis de compreensão dos conceitos geométricos. Para fundamentação, nos pautamos em van de Walle (2009), Nasser e Sant'Anna (2010) e Souza (2015), além da Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2017).

**Palavras-chaves:** Algeplan. Níveis de van Hiele. PIBID. Atividades matemáticas.

### ABSTRACT

The present study reports the application of an activity sequence using algeplan by scholars of the Institutional Program of Initiatives for Teaching (PIBID-Mathematics / DMA / UFS) in a class of 8th grade elementary school in a public school in Aracaju- SE. This activity allowed us to articulate two mathematical fields, geometry and algebra, and to reflect on the level of geometric knowledge of these students in van Hiele's proposal, which suggests a sequence of five levels of understanding of geometric concepts. For reasons, we are based on van de Walle (2009), Nasser and Sant'Anna (2010) and Souza (2015), in addition to the National Curricular Common Base (Brasil, 2017).

**Keywords:** Algeplan. Levels of van Hiele. PIBID. Mathematical activities.

<sup>1</sup>Graduanda em Matemática Licenciatura pela Universidade Federal de Sergipe. Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência. Voluntária do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica. E-mail: nailys\_sena@hotmail.com

<sup>2</sup> Mestranda do Ensino de Ciências e Matemática pelo PPGECIMA/UFS. Especialista em educação inclusiva e em educação em química pela Pio X. Pedagoga pela Pio X e estudante de Licenciatura em Química pelo IFS. Integrante dos grupos de pesquisa GEPED/Pio X e EDUCON/UFS, registrado no CNPQ. E-mail: sielymetal@gmail.com

<sup>3</sup> Graduanda em Matemática Licenciatura pela Universidade Federal de Sergipe. Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência. Bolsista voluntária do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica. E-mail: Jusouzapaula@gmail.com



## INTRODUÇÃO

Neste texto, temos como objetivo refletir sobre o nível de conhecimento geométrico dos alunos na proposta de van Hiele, além de mostrar a articulação entre conceitos geométricos e algébricos por meio da utilização do algeplan em uma turma do 8º ano do ensino fundamental em uma escola da rede pública de Aracaju-SE, parceira do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) do campus São Cristóvão/SE.

O PIBID é um programa de grande importância no curso de Licenciatura em Matemática por oportunizar aos discentes deste curso a experiência de aplicar atividades matemáticas em sala de aula das escolas públicas, antes mesmo dos estágios obrigatórios, contribuindo na formação desses futuros professores e na sua identidade profissional.

Os projetos devem promover a inserção dos estudantes no contexto das escolas públicas desde o início da sua formação acadêmica para que desenvolvam atividades didático-pedagógicas sob orientação de um docente da licenciatura e de um professor da escola (BRASIL, 2008, p. 1).

Dessa forma, com a finalidade de mostrarmos que o ensino de matemática pode favorecer uma aprendizagem mais dinâmica e significativa, nós bolsistas do PIBID-Matemática/UFS, trabalhamos com diferentes atividades matemáticas, sobretudo, com uso de jogos matemáticos e recursos manipuláveis nas escolas estaduais. A partir de 2017, a proposta do nosso grupo passou a trabalhar com conteúdos geométricos na educação básica, não perdendo de vista outros conteúdos matemáticos que os professores supervisores abordem em sala de aula. Com isso buscamos articular, sempre que possível, os demais conteúdos matemáticos com os conceitos geométricos. Segundo John A. van de Walle (2009), uma rica compreensão da geometria tem implicações claras e importantes para outros campos da matemática, como: medidas, raciocínio proporcional, álgebra e números inteiros.

Essas implicações se destacam nas pesquisas que seguem um modelo, o qual sugere uma sequência de níveis sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico. Embora, seja um modelo criado por volta dos anos 1950, nas últimas décadas, esse modelo vem sendo retomado por estudiosos da Educação Matemática, considerando a problemática que demanda esse campo da matemática – a geometria, tanto em nível de aprendizagem dos alunos, independentemente do grau de escolaridade, como em nível de ensino, pela tradição que os conteúdos geométricos sofrem no currículo.



Esse referido modelo, criado por dois educadores holandeses, Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geoldof, passou a ser conhecido como o modelo de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. É um modelo que propõe uma progressão dos alunos ao aprenderem geometria, de acordo com uma sequência de níveis de compreensão dos mais diversificados conceitos. A progressão desses níveis não depende necessariamente da idade ou maturação em que o aluno se encontra, depende mais da aprendizagem adequada dos conteúdos geométricos. Nesse sentido, o aluno só atinge determinado nível de raciocínio após dominar os níveis anteriores. Logo, para que haja a compreensão, por parte dos alunos, é necessário que o professor adote o nível de raciocínio dominado pelos alunos (NASSER; SANT'ANNA, 2010; VAN DE WALLE, 2009).

Quando afirmamos que o aluno só alcança determinado nível após dominar os níveis anteriores, estamos nos referindo a cada conteúdo geométrico. Dessa forma, um aluno pode estar ao mesmo tempo em níveis diferentes, sendo cada um deles referente a um conteúdo geométrico, em específico, pois, cada conteúdo pode abranger articulação com diferentes conceitos anteriores. Por exemplo, um aluno do 8º ano do Ensino Fundamental pode estar no nível 1 do pensamento geométrico de van Hiele quando se trata do conteúdo de triângulos, visto parte desse conteúdo já ter sido estudado em anos anteriores (forma geométrica, ângulos, vértices etc.); no entanto, para outros conceitos neste mesmo assunto (semelhança de triângulos, por exemplo) ou no estudo de quadriláteros, esse mesmo aluno poderá ficar estacionado ainda no nível 0, considerando apenas reconhecer e nomear figuras.

Segundo van de Walle (2009), a teoria de van Hiele estabelece uma hierarquia de cinco níveis, cada um descreve os objetos e produtos de pensamento usados em contextos geométricos, os quais podem ser descritos.

### Caracterização dos níveis de van Hiele

NÍVEL DE VAN HIELE	OBJETOS DE PENSAMENTO	PRODUTOS DE PENSAMENTOS
Nível 0 Visualização	<b>São as formas e "o que elas parecem"</b> . Os alunos nesse primeiro nível reconhecem e nomeiam as figuras, baseado em suas características globais e visuais.	<b>São as classes ou agrupamentos das formas que são "parecidas"</b> . Os alunos nesse nível podem criar e começar a compreender as classificações de formas, como retângulos, triângulos e assim por diante.
Nível 1 Análise	<b>São as classes de formas, mais do que as formas individuais.</b> Os alunos no nível de análise são capazes de considerar todas as formas dentro de uma classe, bem mais do que analisar apenas uma	<b>São as propriedades das formas.</b> Os alunos operando no nível 1 podem ser capazes de listar todas as propriedades de quadrados, retângulos e paralelogramos, mas não percebem que esses são subclasses de outra classe.



	forma única.	
Nível 2 Dedução informal	<b>São as propriedades das formas.</b> Os alunos são capazes de desenvolver relações entre essas propriedades.	<b>São as relações entre as propriedades de objetos geométricos.</b> Os alunos serão capazes de acompanhar e apreciar um argumento dedutivo informal sobre as formas e propriedades.
Nível 3 Dedução	<b>São relações entre as propriedades dos objetos geométricos.</b> Os alunos são capazes de examinar mais do que apenas as propriedades das formas. Estabelecem relações entre as propriedades.	<b>São os sistemas axiomáticos dedutivos para a geometria.</b> Os alunos constroem listas de axiomas e definições para criar teoremas. Eles também provam teoremas usando raciocínio lógico claramente articulado.
Nível 4 Rigor	<b>São sistemas dedutivos axiomáticos para geometria.</b> Esse é o nível mais elevado da hierarquia da Teoria dos van Hiele. Os objetos de atenção são os próprios sistemas axiomáticos, não apenas as deduções dentro de um sistema.	<b>São comparações e confrontos entre os diferentes sistemas axiomáticos da geometria.</b> Este é geralmente o nível de um especialista em matemática no ensino superior que esteja estudando geometria como um ramo da ciência matemática.

**Fonte:** Van de Walle (2009, p.440-443).

Como podemos observar, os produtos de pensamentos em cada nível são os objetos de pensamento do nível seguinte. De acordo com van de Walle (2009), “os objetos (ideias) devem ser criados em um nível de modo que as relações entre esses objetos possam se tornar o foco do nível seguinte”.

Ao estabelecermos uma conexão aos documentos curriculares oficiais vigentes, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, por exemplo, destaca a aproximação do campo da geometria com o campo algébrico, propiciando ao aluno dos anos finais do ensino fundamental a interação dos conteúdos desses dois campos matemáticos. Com isso, a Geometria não pode ser ensinada apenas como aplicação de fórmulas e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas. Situações que os alunos enfrentam há décadas, depois da inclusão das estruturas algébricas como linguagem matemática mais acessível para se aprender geometria.

A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (BRASIL, 2017, p. 228).

Infelizmente, o que temos observado por meio das pesquisas realizadas sobre essa problemática e pelas aulas de matemática que observamos antes de aplicar atividades do PIBID, é que os professores, quase em sua totalidade, abordam conteúdos geométricos sem a preocupação de fazer uma articulação com a história da matemática ou mesmo sem explorar



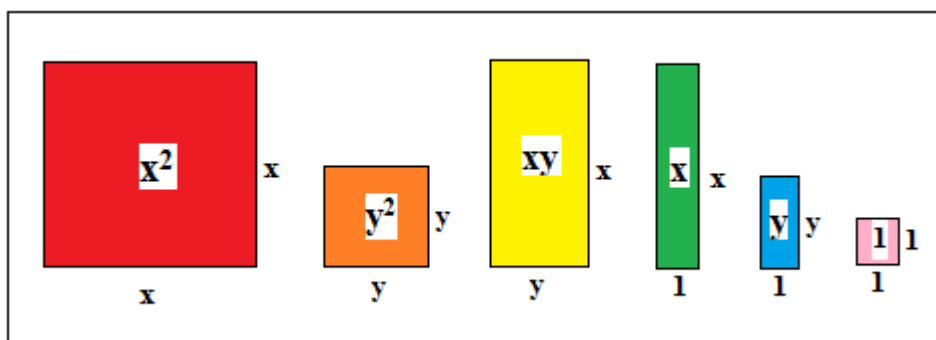


construções geométricas. Eles trabalham de forma automática, seguindo rituais de aula meramente expositiva, sem sequer usar material geométrico para tornar a visualização do aluno mais compreensível. Fato esse que não contribui com o progresso dos alunos em avançar outros níveis do pensamento geométrico. Eles estacionam, decoram fórmulas, fazem cálculos automáticos (SOUZA, 2015).

## MATERIAIS E MÉTODOS

A sequência de atividades se deu com a construção do algeplan, e em seguida com a aplicação das atividades “MultiAlgeplan” e “DivAlgeplan”, as atividades tem nível de abrangência do 8º ano do ensino fundamental, com tempo previsto de 02 horas/aula para realização dessa sequência didática, cujo material necessário para sua aplicação é algeplan. O algeplan é um material manipulativo utilizado para o ensino de soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios de grau no máximo dois, utilizando áreas de retângulos. É composto por três quadrados de áreas “ $x^2$ ”, “ $y^2$ ” e “1” e três retângulos com áreas “ $xy$ ”, “ $x$ ” e “ $y$ ”.

Figura 1. Representação das peças do algeplan.



Fonte: elaboração própria.

A referida atividade foi uma das atividades realizada em das turmas do 8º ano de uma das escolas parceiras da rede estadual. Para a sua execução, planejamos duas sequências de ensino envolvendo a construção do próprio material e a operacionalização de multiplicação e divisão de polinômios. Neste texto, abordaremos sobre a construção e a operação da multiplicação e divisão.

Assim, inicialmente, confeccionamos o algeplan com E.V.A., juntamente com os alunos que foram divididos em duplas, cada dupla confeccionando dois algeplan com cores diferentes. Na medida que orientávamos, fazíamos um modelo para que vissem como deveriam fazer o procedimento com as mesmas medidas, para que o material tivesse mesmo padrão



para todos. Entretanto, a atividade não se caracterizou apenas pelo simples manuseio do material, pois para construir cada peça, fomos explorando os conceitos de área dos retângulos. Uma forma para os alunos compreenderem a legenda das peças que seriam usadas para representar expressões algébricas no estudo das operações com polinômios.

Dessa forma, em relação aos níveis de van Hiele, a sequência didática proposta para a construção do algeplan foi planejada para abranger os dois primeiros níveis (0 e 1), considerando que os alunos pudessem nomear os retângulos que formam o algeplan (nível 0) e soubessem identificar as propriedades dessas figuras. Para tanto, procedemos alguns questionamentos acerca das figuras, com o objetivo de, a partir das respostas dos alunos, podermos identificar o nível de pensamento geométrico da turma.

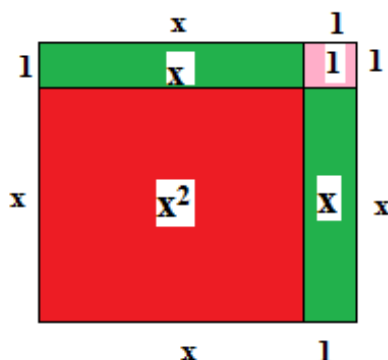
O que caracteriza o nível da resposta é o modo de pensar do aluno, se ele se fixa só na aparência global (nível de reconhecimento) ou nos elementos da figura (nível de análise), se ele reconhece a inclusão de classes (nível de abstração), se consegue argumentar informal (nível de dedução) ou formalmente (nível rigor), etc. (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 8).

Após a confecção do algeplan, os alunos passaram a fazer uso do material para resolverem operações da multiplicação e divisão com polinômios. Como informamos, cada uma das sequências didáticas teve 02h/aula de duração, então, na aula seguinte à confecção, os alunos foram orientados a manipularem o material, inicialmente, fazendo uso para a multiplicação e posteriormente para a divisão de polinômios. No dia da aplicação, haviam 25 alunos na turma, com isso, solicitamos que os alunos formassem trios ou quartetos para a realização das atividades.

Retomamos, o conceito de área (retângulos e quadrados) e identificação das peças e suas respectivas áreas. Em seguida, apresentamos no quadro branco a expressão  $x + 1$  (Figura 02) para que representassem um quadrado com lado igual a essa expressão.



Figura 2. Quadrado de lado  $x + 1$



Fonte: elaboração própria.

Seguindo as sugestões dos alunos, escrevemos no quadro que a área do quadrado ( $A$ ) é igual a base ( $b$ ) vezes a altura ( $h$ ):  $A = b \cdot h = (x + 1) \cdot (x + 1)$ ; em seguida, pedimos para que os alunos olhando para figura, respondessem qual era a área do quadrado. Como os alunos já haviam aprendido a multiplicar polinômios, eles sugeriram que bastava usar a distributividade para calcular a área solicitada. Informamos aos alunos que havia uma forma de determinar a área do quadrado sem fazer o cálculo que sugeriram, apenas utilizando as áreas já conhecidas de cada peça do algeplan.

Como os alunos não conseguiram visualizar que a área do quadrado é igual a soma das áreas dos quatro retângulos que formam o quadrado proposto, vimos que era necessário mostrar geometricamente. Assim, fizemos, explicando-lhes o que cada uma das figuras representava algebricamente, escrevendo a igualdade no quadro branco.

$$A = b \cdot h = (x + 1) \cdot (x + 1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1.$$

Em seguida, pedimos aos alunos que determinassem os produtos dos polinômios  $(x + 2) \cdot (x + 1)$ ,  $(2x + 2) \cdot (x + 1)$ ,  $(x + y) \cdot (x + y)$  utilizando as áreas dos retângulos. Inicialmente, ainda houve quem mostrasse dificuldade para relacionar a figura ao resultado algébrico, porém, o resultado mostrou-se satisfatório porque entenderam a lógica do uso desse material.

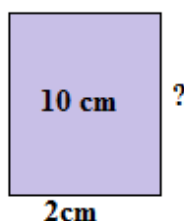
$$(x + 2) \cdot (x + 1) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2.$$



O professor supervisor, já havia nos avisado que ainda não tinha explicado o cálculo de divisão de polinômios apenas multiplicação, mas que acreditava ser interessante fazer a divisão de polinômios geometricamente para que os alunos visualizassem o cálculo que aprenderiam posteriormente. Assim que informamos que eles iriam dividir polinômios, os alunos nos questionaram como fariam isso, uma vez que não tinham visto o conteúdo. Com isso, respondemos-lhes que não era necessário eles saberem fazer o cálculo da divisão, pois faríamos geometricamente, assim como eles haviam feito na multiplicação utilizando área dos retângulos.

Inicialmente, relembramos juntamente com os alunos o que a divisão era a operação inversa da multiplicação e vice-versa. Com isso, se a área do retângulo é igual ao produto da base pela altura, se soubermos o valor da base e da área do retângulo, de que forma poderíamos encontrar a altura desse retângulo? Formalizamos a pergunta no quadro utilizando um exemplo de um retângulo onde se sabe a medida da base e a área, então perguntamos qual era a medida da altura desse retângulo?

Figura 3. **Retângulo de base 2 cm e área 10 cm**



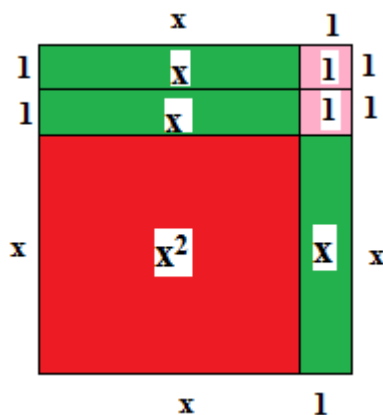
Fonte: elaboração própria

Somando as respostas dos alunos, foi possível verificar que para sabermos a medida da altura, basta fazermos a divisão da área pela base do retângulo. Daí, informamos aos alunos que de forma análoga faríamos para dividirmos dois polinômios. Ou seja, para calcularmos a divisão  $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1)$ , em que o primeiro polinômio é a área do nosso retângulo enquanto que o segundo polinômio é um dos lados do nosso retângulo, será necessário pegamos um quadrado de área " $x^2$ ", três retângulos de área " $x$ " e dois quadrados de área " $1$ " e a partir deles montarmos um retângulo de forma que um dos lados tivesse medida igual a " $x+1$ ".





Figura 4. Retângulo de área " $x^2 + 3x + 2$ " e lado " $x+1$ "



Fonte: Elaboração própria

Assim que montamos o retângulo de área " $x^2 + 3x + 2$ " e lado " $x + 1$ ", questionamos aos alunos qual a medida do outro lado do retângulo. Com um pouco de dificuldade alguns alunos responderam " $x + 2$ ". Tentamos mais uma vez explicar o mecanismo da divisão a partir do algeplan, em que os alunos foram capazes de entender e calcular a divisão de polinômios. Em seguida, pedimos aos alunos que determinassem os quocientes dos polinômios  $(x^2 + 4x + 3) \div (x + 1)$  e  $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$  utilizando as áreas dos retângulos. Todos os alunos responderam corretamente as divisões.

## RESULTADOS E ANÁLISE

Os alunos foram bem receptivos e se animaram para utilizar o algeplan construído por eles. Ao informarmos qual seria a atividade, percebemos que os alunos apesar saberem a fórmula para o cálculo de área de um retângulo, não conseguiam articular esse conceito para determinar o produto de polinômios. Percebemos que essa dificuldade se deve ao fato de os alunos não saberem ou não lembrarem que a área de uma figura geométrica é a soma das áreas das figuras que o compõe.

Ao trabalharmos a articulação da álgebra com a geometria, verificamos que os alunos não conseguiam se desapegar do cálculo algébrico já estudado por eles, juntamente com o professor da turma. O que para nós, causou uma dificuldade nos alunos para reconhecerem que o produto e o quociente dos polinômios poderia ser obtido apenas observando a área das figuras. Dessa forma, concluímos que o objetivo da atividade aplicada na turma foi alcançado,



pois a atividade possibilitou aos alunos visualizarem e compreenderem a articulação existente entre o campo algébrico e geométrico, uma vez que,

a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (BRASIL, 2017, p. 228)

Nessa experiência, vimos que a turma apresenta dois níveis de pensamento de van Hiele esperado, nível 0 e 1. A turma foi capaz de reconhecer o retângulo e de listar as principais propriedades dessa figura.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo buscou relatar a aplicação de uma atividade por bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)-Matemática/DMA/UFS, em uma turma do 8º ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública, no município Aracaju-SE. A atividade utilizou o algeplan para trabalhar o produto e o quociente de polinômios utilizando como ferramenta a área de retângulos, na qual articulamos os campos matemáticos, geometria e álgebra. Além disso, foi possível refletir sobre o nível de conhecimento geométrico desses alunos na proposta de van Hiele.

Em relação à articulação entre os campos matemáticos, verificamos que os alunos apresentaram dificuldade em fazer essa articulação e em perceberem que a partir da área de figuras planas era possível determinar o produto e o quociente de polinômios, sem ser necessário realizar o cálculo algébrico.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira versão. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2017. Disponível em <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCpublicacao.pdf>>. Acesso em: 25 out. 2017

BRASIL. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Documento orientado do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)**. Brasília-DF: MEC/CAPES/PIBID, 2008. Disponível em: <http://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid>. Acesso em: 25 out. 2017.



LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: \_\_\_\_\_. (Org.). **Formação de professores: o laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2009. p. 03-37.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. 2.ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

SOUZA, D. da S. **O universo explicativo do professor de matemática ao ensinar o teorema de Tales**: um estudo de caso na rede estadual de Sergipe. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Coordenadoria de Pós-graduação. Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo-SP: UNIAN, 2015.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.